

САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА  
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА



---

---

РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ  
ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ SAMRAS-2016  
СРЕДИ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ  
ЗАОЧНОГО ТУРА № 1

---

---

*Задачи подготовил:*

**Филиппов Юрий Петрович,**  
научный руководитель школы,  
старший преподаватель кафедры  
общей и теоретической физики  
Самарского государственного  
университета, к.ф.-м.н.

Самара, 2015 г.

## Уровень «Новичок» (уровень А)

### Задача № 1. «Самое большое и самое маленькое созвездия небосвода»

**Условие.** Как известно, сегодня на небосводе насчитывается 88 созвездий. Какое из этих созвездий является самым большим? А какое является самым маленьким? Какая величина традиционно является количественной мерой размера созвездия? (3 балла).

#### Решение:

Размеры созвездия определяет *площадь* части небесной сферы, занимаемой ими. Именно данная характеристика является количественной сравнительной мерой. В свою очередь площадь определяется *телесным углом* – частью пространства, которая является объединением всех лучей, выходящих из данной точки (вершины угла) и пересекающих некоторую поверхность (которая называется поверхностью, стягивающей данный телесный угол) – в нашем случае область, занимаемую созвездием. Мерой телесного угла является *квадратный градус* – это величина, отвечающая телесному углу (угловой площади) области на небесной сфере с угловыми размерами  $1^\circ \times 1^\circ$ .

*Самым большим созвездием* (по занимаемой на небесной сфере площади) является созвездие *Гидра* – созвездие южного полушария неба (см. рис. 1.а), самая яркая звезда которого – Альфард, имеет блеск  $2.0^m$ . Наилучшие условия видимости созвездия в феврале-марте. Созвездие видно полностью в южных районах России и частично – на остальной ее территории. Площадь, занимаемая созвездием, равна  $\hat{S} = 1302.844$  кв. градуса.

Самым маленьким среди 88 созвездий считается созвездие *Южный Крест* (см. рис. 1.б). Это созвездие южного полушария неба. Четыре ярких звезды образуют легко узнаваемый астеризм, который служил для навигации: линия, проведенная через звезды  $\alpha$  и  $\gamma$  Южного Креста приблизительно проходит через Южный полюс мира на расстоянии в 4.5 раза дальше, чем расстояние между звездами. Это особенно важно, поскольку на южном небе нет яркой полярной звезды. Площадь, занимаемая созвездием, равна  $\hat{S} = 68.447$  кв. градуса.

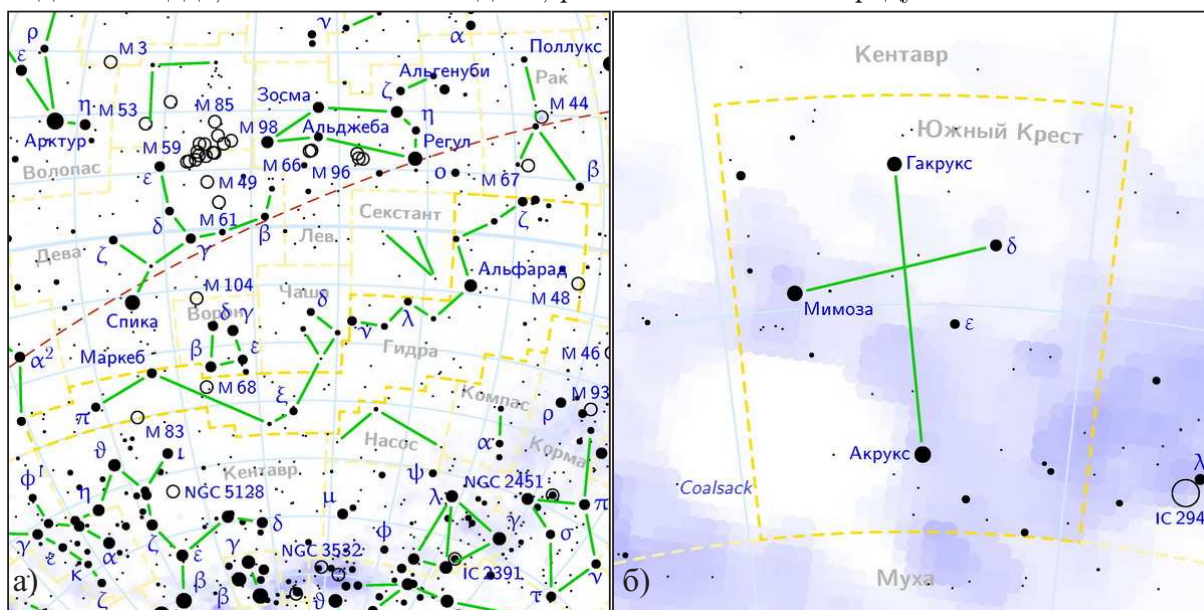


Рис. 1: созвездия а) Гидры, б) Южного креста (изображения Wikipedia).

**Ответ:** самое большое созвездие – Гидра ( $\hat{S} = 1302.844$  кв. градуса); самое маленькое созвездие – Южный Крест ( $\hat{S} = 68.447$  кв. градуса); количественной мерой области небосвода, занимаемой созвездием является квадратный градус. ( $S_{\max} = 3$  балла).

### Задача № 2. «Астрономические грабли»

**Условие.** Что такое "астрономические грабли"? Какие астрономические задачи можно решить с помощью них? Можно ли их создать в домашних условиях? (3 балла).

Решение:

**Астрономические грабли** – простейший вариант угломерного прибора (см. рис. 2.а), состоит из двух равных деревянных реек (например, по 60 см длиной), скрепленных в форме буквы Т. Не содержит подвижных частей. На конце балки, противоположно перекладине, укрепляется визир. На перекладине по дуге окружности с радиусом 57.3 см (построить можно с помощью шнура) с интервалом в 1 см (либо в 0.5 см) вбиваются гвоздики. Центром окружности является визир. Цена деления в 1 см соответствует углу в 1 градус на небесной сфере, при 0.5 см – угол в полградуса. Свое название этот простой инструмент для измерения углов на небе получил за внешнее сходство с садовыми граблями.

Однако, возможно изготовление граблей по модифицированной упрощенной схеме, когда в роли перекладины выступает металлическая линейка, деформированная в дугу окружности, с помощью жесткого шнура (см. рис. 2.б). Здесь цена деления может составлять 6'.

С помощью данного инструмента можно решить следующие практические задачи

1. Определять угловые размеры крупных небесных тел (Солнца, Луны) и атмосферных явлений (например, различных видов гало).
2. Определять угловые расстояния (а, следовательно, и координаты) планет, Луны и других тел Солнечной системы относительно некоторых "опорных" звезд и тем самым устанавливать особенности движения упомянутых светил на небесной сфере.
3. Определять приближенно угловые размеры созвездий и др.

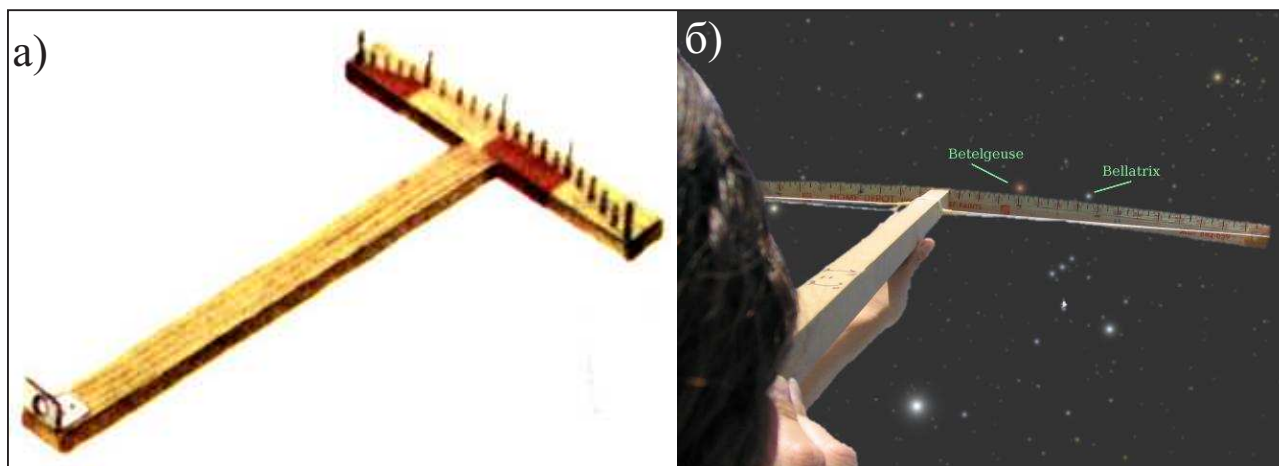


Рис. 2: а) классическая схема астрономических граблей, б) модифицированная упрощенная схема граблей и измерение углов с помощью них.

**Задача № 3. «Самое быстрое небесное тело»**

Условие. Какое из известных вам небесных тел обладает наибольшим собственным движением с точки зрения земного наблюдателя? Оцените его величину. (3 балла).

Решение:

**Собственное движение** небесного тела – это угол, на который смещается небесное тело по небосводу за единицу времени. Данную величину можно представить выражением вида:

$$\mu = \frac{V_{\tau}}{r}, \quad (1)$$

где  $V_{\tau}$  – тангенциальная скорость небесного тела, составляющая полной скорости, расположенная в картинной плоскости.  $r$  – расстояние до небесного тела. Для всех тел нашей Галактики

$$0 \text{ км/с} \leq V_{\tau} \leq 600 \text{ км/с},$$

а расстояние при этом заключено в пределах

$$3.84 \cdot 10^5 \text{ км} \leq r \leq 7.71 \cdot 10^{17} \text{ км.}$$

Поскольку, расстояние до объекта принадлежит более широкому интервалу возможных значений и зависимость  $\mu(r)$  является гиперболической, то следует ожидать, что наибольшее собственное движение у самого близкого к Земле небесного тела – Луны. Данные астрономических наблюдений этот факт подтверждают. Оценим искомую величину. Для этого заметим, что сидерический период обращения Луны вокруг Земли (относительно далеких звезд) равен  $T_{\zeta} = 27.32$  сут. За указанный промежуток времени Луна совершает один полный оборот соответствующий  $360^\circ$ . Тогда среднее собственное движение Луны есть

$$\bar{\mu}_{\zeta} = \frac{360^\circ}{T_{\zeta}} = 13.18^\circ/\text{сут.}$$

**Ответ:** Луна обладает наибольшим собственным движением –  $\bar{\mu}_{\zeta} = 13.18^\circ/\text{сут.}$  ( $S_{\max} = 3$  балла).

#### Задача № 4. «От квадратуры до элонгации»

**Условие.** В некоторый момент времени Сатурн с Земли наблюдался в западной квадратуре. Через какой минимальный промежуток времени Земля окажется в западной элонгации для гипотетического наблюдателя, находящегося у поверхности Сатурна? (4 балла).

#### Решение:

Для определения искомого промежутка времени рассмотрим движение Земли и Сатурна вокруг Солнца (в приближении круговых орбит).

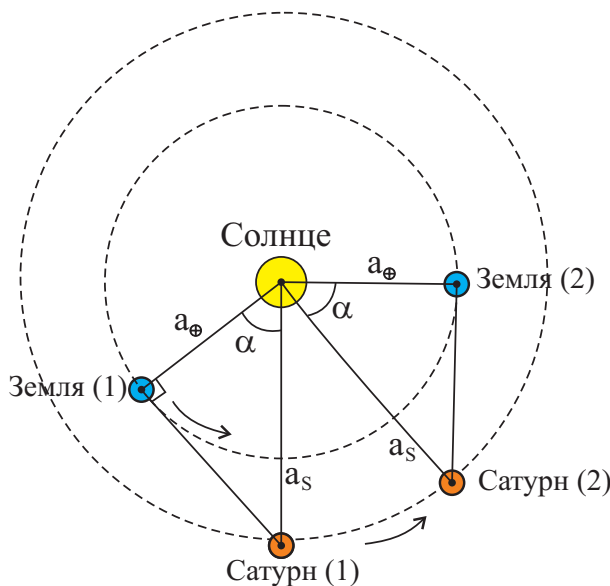


Рис. 3: к определению времени между западной квадратурой Сатурна и западной элонгацией Земли.

Пусть в момент времени  $t_1$  Земля и Сатурн занимали положения (1). При этом с Земли Сатурн наблюдался в западной квадратуре, в это время, с точки зрения гипотетического наблюдателя, находящегося у поверхности Сатурна, Земля находилась в восточной элонгации. Угол между радиусами-векторами, проведенными из центра Солнца к данным телам в указанный момент времени, составлял  $\alpha$ , который удовлетворяет условию

$$\cos \alpha = \frac{a_{\oplus}}{a_S}, \Rightarrow \alpha = \arccos \left( \frac{a_{\oplus}}{a_S} \right) = 84^\circ,$$

здесь  $a_{\oplus} = 1.00$  а.е.,  $a_S = 9.58$  а.е. – средние расстояния Земли и Сатурна от Солнца. Поскольку у Земли сидерический период обращения  $T_{\oplus} = 1$  год, существенно меньше периода обращения Сатурна  $T_{\oplus} = 29.46$  года, то Земля "обгоняет" Сатурн и занимает новое положение (2). С точки зрения гипотетического наблюдателя, находящегося у поверхности Сатурна, Земля находится в этот момент в восточной элонгации. Здесь угол между радиусами-векторами планет вновь будет равен  $\alpha$ . Т.о. относительно Сатурна Земля должна переместиться на угол  $2\alpha$ . При этом угловая скорость ее движения относительно Сатурна равна:

$$\omega_{\text{rel}} = \omega_{\oplus} - \omega_S = \frac{360^\circ}{T_{\oplus}} - \frac{360^\circ}{T_S} = 360^\circ \left( \frac{T_S - T_{\oplus}}{T_{\oplus} T_S} \right).$$

В итоге искомый промежуток времени есть

$$\tau = \frac{2\alpha}{\omega_{\text{rel}}} = \frac{2\alpha}{360^\circ} \left( \frac{T_{\oplus} T_S}{T_S - T_{\oplus}} \right) = 0.48 \text{ года} = 176 \text{ сут.}$$

Ответ:  $\tau = 0.48$  года = 176 сут. ( $\$_{\max} = 4$  балла).

### Задача № 5. «Вращающиеся переменные звезды»

Условие. В настоящее время среди прочих переменных звезд выделяют в отдельный класс вращающиеся переменные звезды. Какова природа изменения блеска этих звезд? Какие значения принимает амплитуда и период изменения их блеска? Почему сравнительно недавно удалось обнаружить эти звезды? (4 балла).

#### Решение:

**Вращающиеся переменные звезды** – это переменные звезды, атмосферы которых содержат области-пятна с пониженной или повышенной поверхностной яркостью (образования, типа солнечных пятен, факелов и др. температурные или химические неоднородности, вызванные магнитными полями) и/или они имеют форму, отличную от эллипсоидальной. Изменение блеска этих звезд обусловлено их вращением вокруг оси и несовпадением оси вращения звезды с направлением к наблюдателю, в результате чего средняя поверхностная яркость их полусфер, обращенных к Земле, изменяться.

Период изменения блеска таких звезд равен периоду их вращения. Последняя величина, как правило, принадлежит интервалу

$$1 \text{ сут} \leq P_* \leq 25 \text{ сут}.$$

Амплитуда изменения блеска данных звезд крайне мала, как правило, она удовлетворяет неравенству

$$\Delta m \leq 0.1^m.$$

Поэтому поиск и исследование свойств звезд такого класса требует использования в наблюдениях очень чувствительной фототехники – специальных ПЗС-камер. Однако, эра активного использования ПЗС-камер в профессиональной астрономии наступила относительно недавно – на рубеже XX и XXI веков. Поэтому сравнительно недавно удалось экспериментально обнаружить звезды данного класса. ( $\$_{\max} = 4$  балла).

### Задача № 6. «Фотосъемка камерой LORRI поверхностей Плутона и Харона»

Условие. 14 июля 2015 года космический аппарат "Новые горизонты" (New Horizons, США) испытал тесное сближение с Плутоном (минимальное расстояние –  $r_{\min}^{(1)} = 12500$  км) и его спутником Хароном ( $r_{\min}^{(2)} = 28800$  км). Для фотосъемки поверхностей данных тел использовалась камера LORRI с диаметром объектива  $D_c = 20.8$  см. Оцените разрешающую способность данной камеры. Объекты какого минимального линейного размера может в идеальном случае "разглядеть" данная камера на поверхностях указанных тел в моменты наибольшего сближения? (5 баллов).

#### Дано:

$$\begin{aligned} r_{\min}^{(1)} &= 12500 \text{ км}, \\ r_{\min}^{(2)} &= 28800 \text{ км}, \\ D_c &= 20.8 \text{ см}. \end{aligned}$$

#### Найти:

$$\beta_c, \ell_{\min}^{(1)}, \ell_{\min}^{(2)} - ?$$

#### Решение:

Основу камеры LORRI представляет телескоп-рефлектор системы Ричи-Кретъена с диаметром главного зеркала  $D_c = 20.8$  см. Разрешающая способность телескопа-рефлектора можно оценить по формуле вида:

$$\beta_c'' = \frac{120''}{D_c[\text{мм}]} = 0.58''.$$

Минимальные линейные размеры тел на поверхности (1) Плутона и (2) Харона, которые может в идеальном случае "разглядеть" данная камера, можно определить как

$$\ell_{\min}^{(1)} = r_{\min}^{(1)} \left( \frac{\beta_c''}{206265''} \right) = 35 \text{ м}, \quad \ell_{\min}^{(2)} = r_{\min}^{(2)} \left( \frac{\beta_c''}{206265''} \right) = 81 \text{ м}.$$



Рис. 4: флаг Турции.

Т.о. на поверхности Плутона можно было разглядеть объекты с поперечником в 35 м, а на Хароне – с поперечником 81 м.

**Ответ:**  $\beta_c'' = 0.58''$ ,  $\ell_{\min}^{(1)} = 35$  м,  $\ell_{\min}^{(2)} = 81$  м. ( $\$_{\max} = 5$  баллов).

## Уровень «Знатоки» (уровень В)

### Задача № 7. «Флаг Турции и астрономия»

**Условие.** На рисунке 4 представлен флаг Турции, принятый данным государством в 1936 году. Какие небесные тела и астрономические явления можно увидеть на данном флаге? Есть ли несоответствия действительности ("ляпы") на данном флаге? (6 баллов).

#### Решение:

Отметим, что красный цвет стал цветом Османской империи еще в XIV веке. *Полумесяц (Луна) со звездой* – символ ислама. Примечательно, что первоначально звезда находилась внутри месяца, что с точки зрения астрономии неверно (звезда в этом случае закрывалась невидимой частью Луны) поэтому в начале XX века по требованиям астрономов она была вынесена за пределы месяца.

Однако и в настоящее время флаг содержит некоторое астрономическое несоответствие – внимательный зритель легко заметит, что «полумесяц» на флаге представляет собой не фазу Луны (которую мы можем наблюдать с Земли каждый месяц), а *затмение Луны* непонятным объектом (по размеру и положению орбиты – не Землей) круглой формы (что неестественно для астероидов). Такую Луну невозможно сейчас наблюдать с Земли и невозможно было наблюдать на протяжении тысячелетий раньше.

Полумесяц, считающийся традиционным символом ислама, появился на турецких флагах в середине XV в. после победной битвы при Косовом поле, другие уточняют, что он был заимствован с эмблемы взятого в 1453 г. Константинополя (ныне Стамбул), третьи напоминают, что изображение полумесяца со звездой Юпитера считалось гороскопом султана Османа (правил в конце XIII – начале XIV вв.), было родовой эмблемой его династии.

Параметр	Галилеевы спутники			
	Ио	Европа	Ганимед	Каллисто
Большая полуось, км	421700	670900	1070400	1 882 700
Эксцентриситет	0.0041	0.009	0.0013	0.0074
Периодический, км	420000	664862	1069200	1869000
Апоидий, км	423400	676938	1071600	1897000
Наклонение орбиты к пл-ти экватора Юпитера, град	0.05	0.470	0.200	0.192
Средняя орбитальная скорость, км/с	17.334	13.740	10.880	8.204
Сидерический период обращения, сут	1.769137	3.551181	7.154553	16.689018

Таблица 1: основные орбитальные характеристики галилеевых спутников Юпитера.

Звезды появились на флагах Турции только в начале XIX в., тогда они были семи- и восьмиконечными. Пятиконечная звезда появилась в 1844 г. Долгое время на турецких флагах преобладал священный зеленый цвет пророка Мухаммеда, лишь в 1793 г. султан Селим III повелел узаконить красный цвет.

К моменту своего распада в 1918 г. Османская империя имела флаг, на красном полотнище которого трижды повторялось священное изображение белых полумесяца и пятиконечной звезды. В 1923 г. установлен флаг Турецкой Республики, существующий и по сей день. 29 мая 1936 г. он утвержден официально в пропорции 3:2.

**Ответ:** (6 баллов).

### Задача № 8. «Галилеевы спутники и изменения их блеска»

**Условие.** У какого из четырех галилеевых спутников в его орбитальном движении вокруг Юпитера наблюдается наибольшее изменение блеска? У какого – наименьшее изменения блеска? Оцените минимальное и максимальные возможные значения искомых величин для этих спутников, если большая полуось и эксцентриситет орбиты Юпитера равны  $a_J = 5.204$  а.е.,  $\varepsilon_J = 0.0488$ , а орбитальные характеристики спутников представлены в таблице 1. (7 баллов).

<b>Дано:</b> $a_J = 5.204$ а.е., $\varepsilon_J = 0.0488$ .
<b>Найти:</b> $\alpha_{\min}, \alpha_{\max}?$

#### **Решение:**

Рассмотрим частный случай взаимного расположения Земли и Юпитера – ситуацию противостояния Юпитера (см. рис. 5). Освещенность, создаваемая Солнцем у поверхности галилеева спутника в положениях (1) и (2) есть

$$E_{\odot}^{(1)} = \frac{L_{\odot}}{4\pi (r_J - r_S)^2}, \quad E_{\odot}^{(2)} = \frac{L_{\odot}}{4\pi (r_J + r_S)^2},$$

здесь  $r_J$  – гелиоцентрическое расстояние Юпитера,  $r_S$  – радиус орбиты галилеева спутника. Полагая, что сферическое альbedo спутника есть  $A_S$ , а радиус –  $\mathfrak{R}_S$ , то освещенность, создаваемая спутником у поверхности Земли есть

$$E_S^{(1)} = E_{\odot}^{(1)} \pi \mathfrak{R}_S^2 A_S \frac{1}{4\pi (\Delta_J - r_S)^2} = \frac{L_{\odot}}{4\pi (r_J - r_S)^2} \times \frac{\pi \mathfrak{R}_S^2 A_S}{4\pi (\Delta_J - r_S)^2},$$

$$E_S^{(2)} = E_{\odot}^{(2)} \pi \mathfrak{R}_S^2 A_S \frac{1}{4\pi (\Delta_J + r_S)^2} = \frac{L_{\odot}}{4\pi (r_J + r_S)^2} \times \frac{\pi \mathfrak{R}_S^2 A_S}{4\pi (\Delta_J + r_S)^2},$$

Отношение освещенностей, создаваемых спутником, пребывающим в самой далекой и самой близкой точке к Солнцу (Земле) определяет изменение его блеска, согласно формуле Погсона:

$$\frac{E_S^{(1)}}{E_S^{(2)}} = \left( \frac{r_J + r_S}{r_J - r_S} \right)^2 \times \left( \frac{\Delta_J + r_S}{\Delta_J - r_S} \right)^2 = \left( 1 + \frac{2r_S}{r_J - r_S} \right)^2 \times \left( 1 + \frac{2r_S}{\Delta_J - r_S} \right)^2, \quad \Delta m = 2.5 \lg \left( \frac{E_S^{(1)}}{E_S^{(2)}} \right).$$

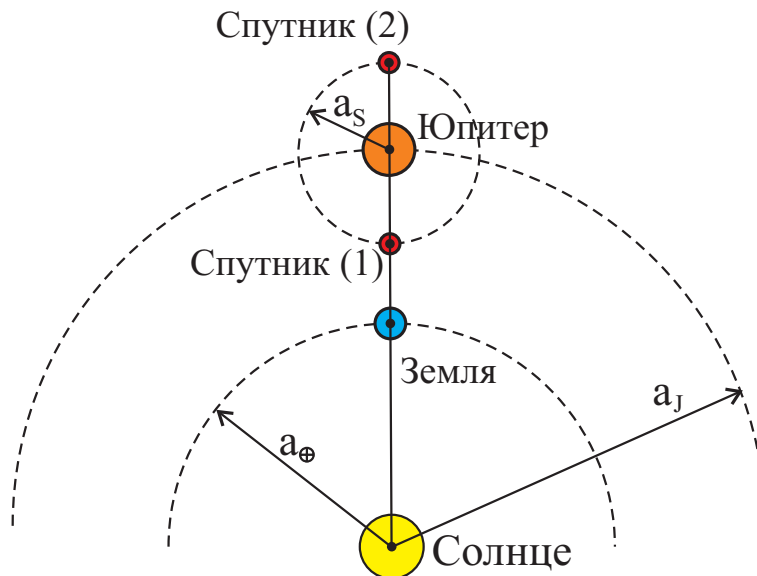


Рис. 5: к определению изменения блеска спутника.

Учитывая далее, что  $r_J, \Delta_J \gg r_S$  и используя биномиальное приближение вида

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x, \quad \text{при } x \ll 1.$$

в итоге получаем

$$\frac{E_S^{(1)}}{E_S^{(2)}} \approx 1 + 4 \left( \frac{r_S}{r_J} + \frac{r_S}{\Delta_J} \right).$$

Из полученного результата следует,

- *во-первых*, чем больше радиус орбиты спутника тем больше отношение освещенностей, и, следовательно, больше изменение блеска спутника. Следовательно, наибольшее значение  $\Delta m$  при прочих равных условиях следует ожидать у Каллисто, а минимальное – у Ио.
- *во-вторых*, наибольшее значение изменения блеска спутника достигается при минимальном расстоянии от Солнца до Юпитера ( $r_J$ ) и минимальном геоцентрическом расстоянии Юпитера ( $\Delta_J$ ). Следовательно, ситуация реализуется, когда Юпитер находится в перигелии своей орбиты, а Земля находится в афелии, при этом Юпитер в противостоянии для земного наблюдателя.
- *в-третьих*, наименьшее значение изменения блеска спутника достигается при максимальном расстоянии от Солнца до Юпитера ( $r_J$ ) и максимальном геоцентрическом расстоянии Юпитера ( $\Delta_J$ ). Следовательно, ситуация реализуется, когда Юпитер находится в афелии своей орбиты, а Земля находится в афелии, при этом Юпитер в соединении для земного наблюдателя.

Согласно выше сказанному вычислим минимальные и максимальные значения изменения блеска Ио, Европы, Ганимеда и Каллисто по формулам:

$$\Delta m_{\min} = 2.5 \lg \left[ 1 + 4 r_S \left( \frac{1}{a_{\text{I}}(1 + \varepsilon_{\text{I}})} + \frac{1}{a_{\text{I}}(1 + \varepsilon_{\text{I}}) + a_{\oplus}(1 + \varepsilon_{\oplus})} \right) \right],$$

$$\Delta m_{\max} = 2.5 \lg \left[ 1 + 4 r_S \left( \frac{1}{a_{\text{I}}(1 - \varepsilon_{\text{I}})} + \frac{1}{a_{\text{I}}(1 - \varepsilon_{\text{I}}) - a_{\oplus}(1 + \varepsilon_{\oplus})} \right) \right],$$

здесь  $a_{\oplus} = 1.000$  а.е.,  $\varepsilon_{\oplus} = 0.0167$  – большая полуось и эксцентриситет орбиты Земли.

**Ответ:** У Каллисто наблюдается наибольшее изменение блеска; у Ио – наименьшее изменения блеска. Численные значения представлены в таблице 2. (7 баллов).



Параметр	Галилеевы спутники			
	Ио	Европа	Ганимед	Каллисто
$\Delta m_{\min}$ , зв. вел.	$4.15 \cdot 10^{-3}$	$6.59 \cdot 10^{-3}$	$1.05 \cdot 10^{-2}$	$1.84 \cdot 10^{-2}$
$\Delta m_{\max}$ , зв. вел.	$5.60 \cdot 10^{-3}$	$8.89 \cdot 10^{-3}$	$1.42 \cdot 10^{-2}$	$2.48 \cdot 10^{-2}$

Таблица 2: минимальное и максимальное значения изменения блеска галилеевых спутников.

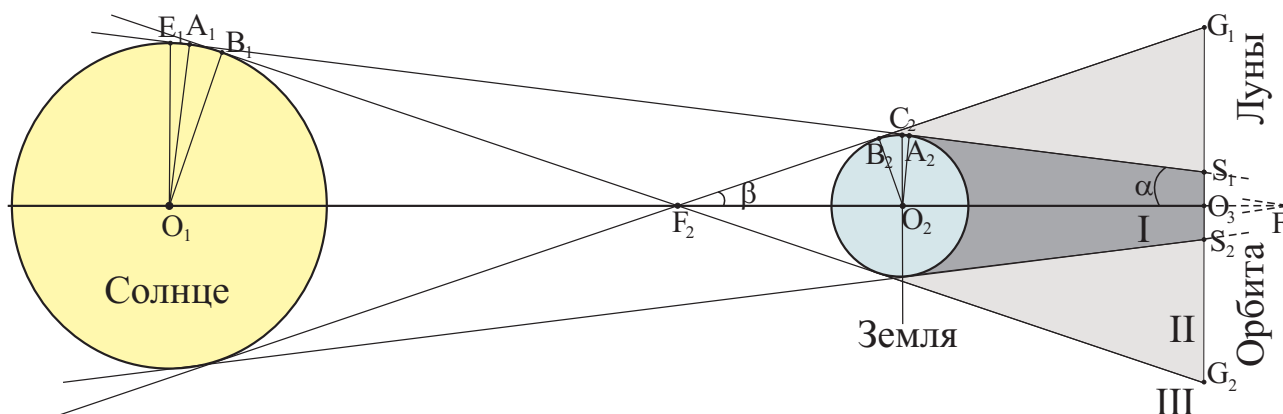


Рис. 6: к определению линейных размеров тени и полутени Земли.

**Задача № 9. «Линейные размеры тени и полутени Земли»**

**Условие.** В некоторый момент времени наблюдается полное лунное затмение. Оцените возможные линейные размеры тени и полутени, отбрасываемые Землей, на расстоянии лунной орбиты. Во сколько раз угловые размеры тени и полутени больше соответствующего размера видимого диска Луны? (8 баллов).

**Решение:**

Рассмотрим процесс формирования тени полутени Земли на орбите Луны. Поскольку Солнце много больше (в 109 раз!) Земли, то всегда существуют световые лучи (например,  $A_1A_2$ , на рис. 6), которые проходят по касательной к поверхностям данных тел (с одной стороны относительно прямой, проходящей через центры данных тел) и образуют внешнюю границу сходящегося к лунной орбите конуса тени (область I за Землей).

Всегда существуют световые лучи, которые проходят в касательную, по разные стороны тел относительно прямой, проходящей через центры данных тел. Последние образуют внешнюю границу расходящегося конуса полутени (область II за Землей).

Определим угол  $\alpha$  при вершине  $F_1$  конуса тени и расстояние  $O_2F_1 = L$  от центра Земли до вершины. Для этого воспользуемся подобием треугольников  $\triangle O_1A_1F_1$  и  $\triangle O_2A_2F_1$ :

$$\frac{O_1A_1}{O_2A_2} = \frac{O_1F_1}{O_2F_1}, \Rightarrow O_2F_1 = O_1F_1 \left( \frac{O_2A_2}{O_1A_1} \right) = (O_1O_2 + L) \left( \frac{O_2A_2}{O_1A_1} \right).$$

Учтем далее, что  $O_1A_1 = R_{\odot} = 695500$  км – радиус Солнца,  $O_2A_2 = R_{\oplus} = 6371$  км – средний радиус Земли, тогда пусть

$$\nu = \frac{R_{\oplus}}{R_{\odot}} = 9.160 \cdot 10^{-3}.$$

$O_1O_2 = r_{\oplus}$  – гелиоцентрическое расстояние Земли. Расстояние от Земли до Солнца ( $r_{\oplus}$ ) и Луны от Земли ( $r_{\zeta}$ ) изменяются в следующих пределах (см. например, Wikipedia):

$$147098290 \text{ км} \leq r_{\oplus} \leq 152098232 \text{ км}, \quad 363104 \text{ км} \leq r_{\zeta} \leq 405696 \text{ км}, \quad (2)$$

Тогда

$$L(1 - \nu) = \nu r_{\oplus}, \Rightarrow L = \frac{\nu r_{\oplus}}{1 - \nu}. \quad (3)$$

В итоге

$$1359877 \text{ км} \leq L \leq 1406100 \text{ км}. \quad (4)$$

Тогда синус угла  $\alpha$  есть

$$\sin \alpha = \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{L}, \Rightarrow \alpha = \arcsin \left[ \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{L} \right] \approx \mathfrak{R}_{\odot} \left[ \frac{1-\nu}{r_{\oplus}} \right].$$

Тогда диаметр пятна земной тени на лунной орбите есть

$$\begin{aligned} D_{\text{Sh}} &= S_1 S_2 = 2 O_3 F_1 \operatorname{tg} \alpha \approx 2(L - r_{\zeta}) \mathfrak{R}_{\odot} \left[ \frac{1-\nu}{r_{\oplus}} \right] = 2\mathfrak{R}_{\odot} \left( \frac{\nu r_{\oplus}}{1-\nu} + r_{\oplus} - r_{\zeta} - r_{\oplus} \right) \left[ \frac{1-\nu}{r_{\oplus}} \right] = \\ &= 2\mathfrak{R}_{\odot} \left( \frac{r_{\oplus}}{1-\nu} - r_{\zeta} - r_{\oplus} \right) \left[ \frac{1-\nu}{r_{\oplus}} \right] = 2\mathfrak{R}_{\odot} (1 - (1-\nu)(1+x)) = 2\mathfrak{R}_{\odot} (\nu - x(1-\nu)), \quad x = \frac{r_{\zeta}}{r_{\odot}}. \end{aligned}$$

В итоге

$$D_{\text{Sh}} = 2\mathfrak{R}_{\odot} (\nu - x(1-\nu)), \quad x = \frac{r_{\zeta}}{r_{\odot}}. \quad (5)$$

Из последнего результата следует, что диаметр пятна достигает максимального значения, в случае, когда параметр  $x$  принимает минимальное значение (т.е. когда Земля находится в афелии своей орбиты, а Луна в перигее своей орбиты). При  $x = \nu/(1-\nu)$  диаметр пятна лунной тени становится равным нулю! Поскольку  $x$  может принимать значения из интервала:

$$2.345 \cdot 10^{-3} \leq x \leq 2.715 \cdot 10^{-3}, \quad (6)$$

то диаметр пятна лунной тени может принимать значения из интервала

$$9000 \text{ км} \leq D_{\text{Sh}} \leq 9510 \text{ км}, \Rightarrow 2.59 \leq \frac{D_{\text{Sh}}}{2\mathfrak{R}_{\zeta}} \leq 2.74, \quad (7)$$

где  $\mathfrak{R}_{\zeta} = 1737$  км – средний радиус Луны.

Определим далее диаметр лунной полутени  $G_1 G_2$ . Воспользуемся подобием треугольников  $\triangle O_1 B_1 F_2$  и  $\triangle O_2 B_2 F_2$ :

$$\frac{O_1 B_1}{O_2 B_2} = \frac{O_1 F_2}{O_2 F_2},$$

учитывая, что  $O_1 B_1 = \mathfrak{R}_{\odot}$ ,  $O_2 B_2 = \mathfrak{R}_{\oplus}$ ,  $O_2 F_2 = \rho$ ,  $O_1 F_2 = r_{\oplus} - \rho$ , тогда последнее уравнение можно представить в виде:

$$\frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{\mathfrak{R}_{\zeta}} = \frac{r_{\oplus} - \rho}{\rho}, \Rightarrow \rho = \frac{\nu r_{\oplus}}{1+\nu}.$$

Тогда синус угла  $\beta$ , есть

$$\sin \beta = \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}}{\rho}, \Rightarrow \beta \approx \frac{\mathfrak{R}_{\oplus}(1+\nu)}{\nu r_{\oplus}} = \frac{\mathfrak{R}_{\odot}(1+\nu)}{r_{\oplus}}.$$

В итоге диаметр лунной полутени есть

$$\begin{aligned} D_{\text{S-Sh}} &= G_1 G_2 = 2 F_2 O_3 \operatorname{tg} \beta \approx 2(\rho + r_{\zeta}) \mathfrak{R}_{\odot} \left[ \frac{1+\nu}{r_{\oplus}} \right] = 2\mathfrak{R}_{\odot} \left( \frac{\nu r_{\oplus}}{1+\nu} - r_{\oplus} + r_{\zeta} + r_{\oplus} \right) \left[ \frac{1+\nu}{r_{\oplus}} \right] = \\ &= 2\mathfrak{R}_{\odot} \left( r_{\oplus} + r_{\zeta} - \frac{r_{\oplus}}{1+\nu} \right) \left[ \frac{1+\nu}{r_{\oplus}} \right] = 2\mathfrak{R}_{\odot} ((1+x)(1+\nu) - 1) = 2\mathfrak{R}_{\odot} (\nu + x(1+\nu)), \quad x = \frac{r_{\zeta}}{r_{\odot}}. \end{aligned}$$

В итоге

$$D_{\text{S-Sh}} = 2\mathfrak{R}_{\odot} (\nu + x(1+\nu)), \quad x = \frac{r_{\zeta}}{r_{\odot}}. \quad (8)$$

В отличие от случая с пятном земной тени, в данном случае диаметр пятна полутени принимает максимальное значение при максимальном значении  $x$ . Диаметр полутени всегда отличен от нуля, но принимает минимальное значение, когда  $x$  также минимален, в итоге

$$16033 \text{ км} \leq D_{\text{S-Sh}} \leq 16553 \text{ км}, \quad 4.62 \leq \frac{D_{\text{S-Sh}}}{2\mathfrak{R}_{\zeta}} \leq 4.76. \quad (9)$$

**Ответ:** к данной задаче представляется системами неравенств (7), (9). ( $\$_{\max} = 8$  баллов).

**Задача № 10. «Закончится ли "эра полных лунных затмений"?»**

**Условие.** На какое минимальное расстояние должна удалиться Луна от Земли, чтобы феномен полного лунного затмения прекратил свое существование? Точные расчеты показывают, что Луна, в результате приливного взаимодействия с Землей, в итоге удалится от последней на 550 тыс. км, через 5 млрд. лет. Закончится ли в указанный период "эра полных лунных затмений"? Если да, то оцените оставшееся время "эры" при условии, что Луна удаляется от Земли со скоростью 4 см/год. (8 баллов).

**Дано:**

$$\begin{aligned} r_{\zeta}^{(\max)} &= 5.50 \cdot 10^5 \text{ км}, \\ t_{\max} &= 5 \cdot 10^9 \text{ лет}, \\ V_{\zeta} &= 4 \text{ см/год}. \end{aligned}$$

**Найти:**

$$t_{\text{fin}} - ?$$

**Решение:**

Чтобы феномен полного лунного затмения прекратил свое существование необходимо, чтобы в перигее орбиты Луны диаметр земной тени был меньше диаметра Луны. С использованием формулы (5) для диаметра земной тени данное условие можно записать в виде:

$$2\mathfrak{R}_{\odot}(\nu - x(1 - \nu)) \leq 2\mathfrak{R}_{\zeta}, \Rightarrow x \geq \frac{\nu - \mu}{1 - \nu}, \text{ где } \mu = \frac{\mathfrak{R}_{\zeta}}{\mathfrak{R}_{\odot}} = 2.497 \cdot 10^{-3}.$$

В итоге окончательно имеем  $x \geq 6.725 \cdot 10^{-3}$ , что соответствует расстоянию до Луны  $r_{\zeta}^{\min} = x r_{\oplus}$ . Учитывая, что  $r_{\oplus}$  принадлежит интервалу (2), то окончательно имеем, что

$$r_{\zeta}^{\min} \geq 1022799 \text{ км} \geq r_{\zeta}^{(\max)},$$

т.о. минимальное расстояние Луны в перигее должно превышать 1 млн 22.8 тыс. км, что существенно больше конечного радиуса орбиты Луны, который будет иметь место через пять миллиардов. Следовательно, "эра полных лунных затмений" не закончится в ближайшие пять миллиардов лет.

**Ответ:** "эра полных лунных затмений" не закончится в ближайшие пять миллиардов лет. ( $\mathfrak{S}_{\max} = 8$  баллов).

**Задача № 11. «Притяжение Луны и Солнца и положение отвеса»**

**Условие.** Почему сила притяжения к Луне и Солнцу в зависимости от их положения на небе и фаз не влияет на видимое (невооруженным глазом) положение отвеса? Своё объяснение подкрепите математическими выкладками. (9 баллов).

**Решение:**

Пусть  $g_0$  – ускорение свободного падения у поверхности в данной точке поверхности Земли, обусловленное лишь притяжением Земли и центробежной силой ее суточного вращения. Соответствующий вектор  $\vec{g}_0$  определяет направление отвесной линии в данной точке.

Учет гравитационного влияния Луны и Солнца на пробное тело, находящееся у поверхности Земли приводит к модификации результирующего ускорения свободного падения в виде:

$$\vec{g}_{\text{res}} = \vec{g}_0 + \Delta\vec{g}_{\odot} + \Delta\vec{g}_{\zeta}.$$

Оценим  $g_0$  и величины поправок  $\Delta\vec{g}_{\odot}$ ,  $\Delta\vec{g}_{\zeta}$ :

$$g_0 = \frac{G \mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\oplus}^2}, \quad |\Delta\vec{g}_{\odot}| = \frac{G \mathfrak{M}_{\odot}}{r_{\oplus}^2}, \quad |\Delta\vec{g}_{\zeta}| = \frac{G \mathfrak{M}_{\zeta}}{r_{\zeta}^2},$$

здесь  $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$  – универсальная гравитационная постоянная;  $\mathfrak{M}_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ ,  $\mathfrak{M}_{\oplus} = 5.974 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ ,  $\mathfrak{M}_{\zeta} = 7.348 \cdot 10^{22} \text{ кг}$  – масса Солнца, Земли и Луны;  $\mathfrak{R}_{\oplus} = 6.371 \cdot 10^6 \text{ м}$

– радиус Земли,  $r_{\oplus} = 1.496 \cdot 10^{11}$  м – среднее расстояние Земли от Солнца,  $r_{\zeta} = 3.844 \cdot 10^8$  м – среднее расстояние Луны от Земли. В итоге имеем

$$g_0 = 9.82 \text{ м/с}^2, \quad |\Delta \vec{g}_{\odot}| = 5.93 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2, \quad |\Delta \vec{g}_{\zeta}| = 3.32 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^2.$$

Максимальные углы отклонения отвеса от исходного положения, обусловленные гравитационным притяжением Солнца и Луны соответственно, определяется выражениями вида (при взаимной перпендикулярности  $g_0$  и  $|\Delta \vec{g}_{\odot}|, |\Delta \vec{g}_{\zeta}|$ , т.е. когда данные тела находятся у горизонта):

$$\alpha_{\odot} = \frac{|\Delta \vec{g}_{\odot}|}{g_0} = 6.04 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 125'', \quad \alpha_{\zeta} = \frac{|\Delta \vec{g}_{\zeta}|}{g_0} = 3.38 \cdot 10^{-6} \text{ рад} = 0.69''.$$

Как известно, разрешающая способность человеческого глаза составляет  $\beta_y = 60'' \div 120''$ . Поскольку угол отклонения отвеса, обусловленный притяжением Солнца, не превосходит  $125''$ , что фактически лежит на пределе разрешения человеческого глаза, а в случае Луны этот угол еще меньше –  $0.69''$  (что гораздо меньше  $\beta_y$ ), то зафиксировать изменение положения отвеса визуально невооруженным глазом фактически невозможно. Именно поэтому можно утверждать, что положение отвеса не зависит от положения на небе Солнца и фаз Луны. ( $S_{\max} = 9$  баллов).

### Задача № 12. «Местоположение отеля»

**Условие.** Астроном, пребывая в отпуске, остановился в одном из отелей на берегу океана. Утром 23 сентября он вышел на балкон своего номера и стал поджидать верхнюю кульминацию Солнца. В ожидаемый момент Солнце отразилось в центре бассейна шириной  $\ell = 6$  м, отстоящего от балкона на расстоянии  $L = 10$  м. Расстояние от поверхности земли до пола балкона составляло  $H = 10$  м. Рост астронома равен  $h = 1.8$  м. Уравнение времени в этот день было равно  $\eta = -8^{\text{м}}$ . Часы астронома, в этот момент (по местному декретному времени) показывали  $13^{\text{ч}}20^{\text{м}}$ . Астроном знал, что отель находится в 9-м часовом поясе. Оцените по имеющимся данным географические координаты отеля. (10 баллов).

**Дано:**  
 $T = 23.09,$   
 $\ell = 6 \text{ м},$   
 $L = 10 \text{ м},$   
 $H = 10 \text{ м},$   
 $h = 1.8 \text{ м},$   
 $T_{\text{д}} = 13^{\text{ч}}20^{\text{м}},$   
 $N = 9,$   
 $\eta = -8^{\text{м}}.$

**Найти:**  
 $\varphi, \lambda - ?$

### Решение:

Заметим, что событие происходит 23.09, когда Солнце находится в точке осеннего равноденствия. Данная точка расположена на небесном экваторе, следовательно, склонение Солнца в этот день было равно нулю,  $-\delta_{\odot} = 0^{\circ}$ .

Определим высоту ( $h_{\odot}^{(\max)}$ ) Солнца в полдень. Для этого заметим, что  $h_{\odot}^{(\max)} + \alpha = 90^{\circ}$  (см. рис. 7), где  $\alpha$  – угол падения светового луча от Солнца на водную поверхность бассейна. Согласно закону отражения, угол падения равен углу отражения, тогда угол отражения, согласно рис. 7, можно представить в виде:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{L + \ell/2}{H + h}, \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \left[ \frac{L + \ell/2}{H + h} \right].$$

В итоге высота Солнца в полдень представляется в виде:

$$h_{\odot}^{(\max)} = 90^{\circ} - \alpha = 90^{\circ} - \operatorname{arctg} \left[ \frac{L + \ell/2}{H + h} \right] = 42^{\circ}.$$

Иначе, высота Солнца в полдень равна

$$h_{\odot}^{(\max)} = \left\{ \begin{array}{l} 90^{\circ} - \varphi + \delta_{\odot}, \quad \text{к югу от } Z, \\ 90^{\circ} + \varphi - \delta_{\odot}, \quad \text{к северу от } Z \end{array} \right\}, \Rightarrow \varphi = \left\{ \begin{array}{l} 90^{\circ} - h_{\odot}^{(\max)}, \quad \text{к югу от } Z, \\ -(90^{\circ} - h_{\odot}^{(\max)}), \quad \text{к северу от } Z \end{array} \right\}. \quad (10)$$

В итоге широта местности равна  $\varphi = +48^{\circ}$ , если Солнце кульминировало к югу от зенита ( $Z$ ) и равно  $\varphi = -48^{\circ}$ , если оно кульминировало к северу от зенита.

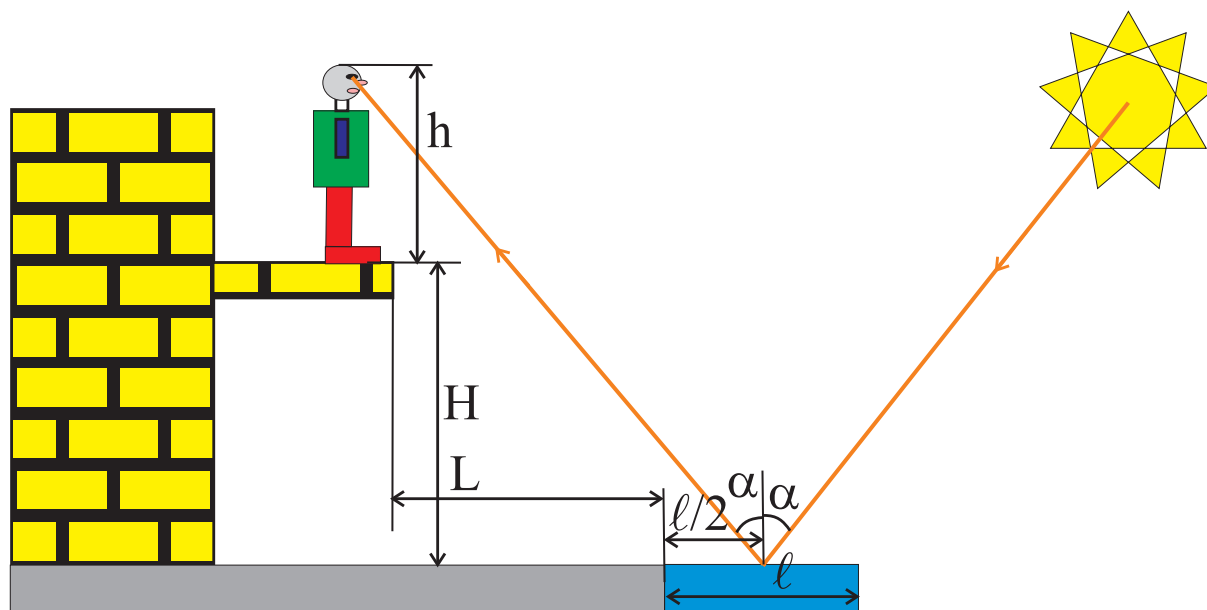


Рис. 7: к определению основных геометрических параметров задачи.

Определим долготу местности ( $\lambda$ ). Для этого учтем, что в истинный полдень истинное солнечное время равно  $T_{\odot} = 12^{\text{h}}$ . Тогда местное среднее солнечное время ( $T_m$ ) в этот момент есть

$$T_m = T_{\odot} + \eta, \text{ иначе } T_m = T_0 + \lambda, \Rightarrow \lambda = T_m - T_0 = T_{\odot} + \eta - T_0,$$

здесь  $T_0$  – всемирное время, подлежащее определению. Учитывая, что часы астронома показывали декретное время ( $T_d$ ) для данного ( $N = 9$ ) пояса, то его можно представить в виде:

$$T_d = T_0 + N + 1^{\text{h}}, \Rightarrow T_0 = T_d - N - 1^{\text{h}} = 3^{\text{h}}20^{\text{m}}.$$

В итоге  $\lambda = 8^{\text{h}}32^{\text{m}} = 128^{\circ}$ .

Т.о. мы получили координаты двух точек поверхности Земли – 1) ( $\varphi = +48^{\circ}$ ,  $\lambda = 128^{\circ}$ ) и 2) ( $\varphi = -48^{\circ}$ ,  $\lambda = 128^{\circ}$ ).

Однако, воспользовавшись географической картой мира, легко убедиться, что первая точка лежит на территории Евразии, вдали от побережья океана. Следовательно, астроном пребывал в точке 2 на берегу одно из малых островов Индийского океана, расположенного севернее Австралии.

**Ответ:**  $\varphi = -48^{\circ}$ ,  $\lambda = 128^{\circ}$ ; астроном пребывал на берегу одно из малых островов Индийского океана, расположенного севернее Австралии. ( $\$_{\text{max}} = 10$  баллов).

## Уровень «Профи» (уровень С)

### Задача № 13. «Транзит небесного тела по диску Солнца»

**Условие.** На рисунке 8.а) представлена фотография транзита небесного тела по диску Солнца. С использованием справочных данных из сторонних источников, определите, какое именно тело испытало транзит? Оцените полное время его транзита. (11 баллов).

#### Решение:

Прежде всего, определим угловой ( $\mu_a$ ) масштаб фотографии следующими выражениями:

$$\mu_a = \frac{\rho''_{\odot}}{R_{\odot}}, \quad \mu_{\ell} = \frac{\mathfrak{R}_{\odot}}{R_{\odot}}, \quad (11)$$

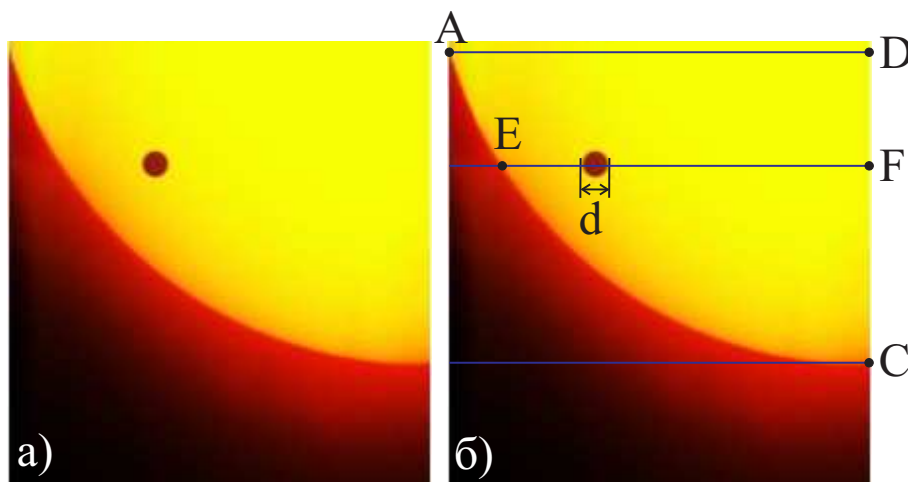


Рис. 8: а) фотография транзита небесного тела по диску Солнца; б) та же фотография с дополнительными построениями.

где  $\rho''_{\odot} = 15.996'$  – средний угловой радиус Солнца,  $\mathfrak{R}_{\odot} = 6.961 \cdot 10^5$  км – линейный радиус Солнца, полученные по данным наблюдений профессионалов,  $R_{\odot}$  – линейный радиус Солнца, измеренный по фотографии.

К сожалению, измерить непосредственно радиус видимого диска Солнца по фотографии не представляется возможным. Поэтому будем для этого использовать несложную методику косвенного определения  $R_{\odot}$ . Рассмотрим круг радиуса  $R$  и круговой сегмент  $ACBDA$ , с высотой  $h$  и основанием  $AB = 2a$  (см. рис. 9). Из треугольника  $\triangle ADO$  по теореме Пифагора следует, что

$$R^2 = a^2 + (R - h)^2, \Rightarrow R = \frac{a^2 + h^2}{2h}.$$

Т.о. для определения радиуса круга необходимо знать высоту  $h$  кругового сегмента и половину его основания –  $a$ . Выполним дополнительное построение на данной фотографии. Проведем через нижнюю точку  $C$  части видимого диска (см. рис. 8.б) касательную. Проведем параллельную ей прямую, через крайнюю левую точку  $A$  диска Солнца. Опустим из точки  $C$  на нее перпендикуляр  $CD$ . В результате мы получаем половину кругового сектора  $ACDA$ , для которого  $h_{\odot} = CD$ ,  $a_{\odot} = AD$  и, следовательно,

$$R_{\odot} = \frac{(a_{\odot}^2 + h_{\odot}^2)}{2h_{\odot}}. \tag{12}$$

Определяя по фотографии значения  $a_{\odot} = 14.4$  см,  $h_{\odot} = 11.4$  см (ваши значения могут отличаться от указанных, в зависимости от формата используемой фотографии), в итоге получаем  $R_{\odot} = 14.795$  см. Тогда угловой и линейный масштаб фотографии представляются значениями  $\mu_a = 1.08'/\text{см}$ ,  $\mu_{\ell} = 47050$  км/см.

Далее измеряем диаметр диска планеты –  $d = 1.0$  см, что отвечает угловому диаметру планеты –  $D''_p = \mu_a d = 65''$ . Вычислим возможные значения углового диаметра Меркурия и Венеры в фазе транзита, согласно формулам

$$D''_{p \min} = \frac{2\mathfrak{R}_p}{\Delta_{\max}} = \frac{2\mathfrak{R}_p}{a_{\oplus}(1 + \varepsilon_{\oplus}) - a_p(1 - \varepsilon_p)}, \quad D''_{p \max} = \frac{2\mathfrak{R}_p}{\Delta_{\min}} = \frac{2\mathfrak{R}_p}{a_{\oplus}(1 - \varepsilon_{\oplus}) - a_p(1 + \varepsilon_p)},$$

здесь  $\mathfrak{R}_p$  – средний радиус планеты;  $a_{\oplus} = 1$  а.е. – большая полуось орбиты Земли,  $\varepsilon_{\oplus} = 0.0167$  – ее эксцентриситет;  $a_p, \varepsilon_p$  – соответствующие параметры орбиты планеты. Для Меркурия имеем

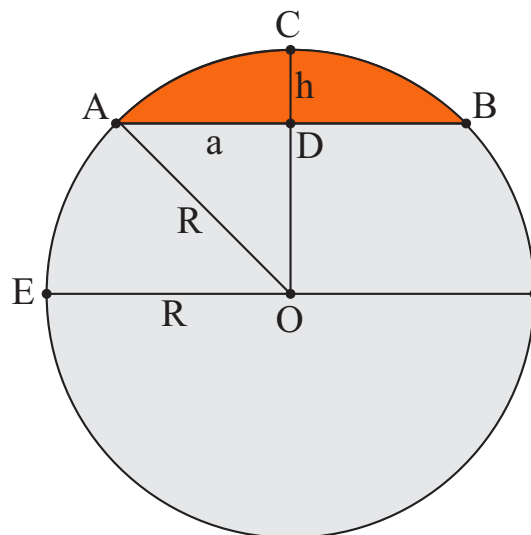


Рис. 9: к определению радиуса круга.

$\mathfrak{M}_{\text{♀}} = 2439.7$  км  $a_{\text{♀}} = 0.387$  а.е.,  $\varepsilon_{\text{♀}} = 0.206$ ; для Венеры –  $\mathfrak{R}_{\text{♀}} = 6051.8$  км,  $a_{\text{♀}} = 0.723$  а.е.,  $\varepsilon_{\text{♀}} = 0.0068$ . В итоге для планет

$$\text{Для Меркурия: } 9.48'' \leq D_{\text{♀}}'' \leq 13.02'', \quad (13)$$

$$\text{Для Венеры: } 55.89'' \leq D_{\text{♀}}'' \leq 65.35''. \quad (14)$$

Из сопоставления результатов следует, что на фотографии представлен транзит Венеры. Оценим полное время  $\tau_{\text{tr}}$  ее транзита. Для этого определим угловую протяженность полухорды EF, по которой двигалась планета.

$$\alpha/2 = \mu_a \cdot EF = 1.08'/\text{см} \cdot 12.6 \text{ см} = 13.608'.$$

следовательно, протяженность всей хорды есть  $\alpha = 27.216'$ .

Определим далее геоцентрическое расстояние Венеры во время транзита:

$$r_{\text{♀}} = \frac{2\mathfrak{R}_{\text{♀}} \cdot 206265''}{D_{\text{♀}}''} = 3.841 \cdot 10^7 \text{ км.}$$

Полное расстояние, которое необходимо пройти Венере во время транзита относительно Земли есть

$$\ell = 2r_{\text{♀}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx r_{\text{♀}} \alpha = 304072 \text{ км.}$$

Скорость движения Венеры относительно Земли во время транзита есть

$$V_{\text{rel}} = V_{\text{♀}} - V_{\oplus} = \frac{2\pi a_{\text{♀}}}{T_{\text{♀}}} - \frac{2\pi a_{\oplus}}{T_{\oplus}} = 47.86 \text{ км/с} - 29.78 \text{ км/с} = 18.08 \text{ км/с.}$$

Следовательно, время транзита есть

$$\tau_{\text{tr}} = \frac{\ell}{V_{\text{rel}}} = 4.67 \text{ часа.}$$

Замечание: Более аккуратный расчет времени транзита Венеры по диску Солнца (которое произошло в 2004 году), с учетом конечности диска и трехмерности процесса транзита планеты дает величину  $\approx 6$  часов.

Ответ: транзит Венеры; его продолжительность  $\tau_{\text{tr}} = 4.67$  часа. ( $\$_{\text{max}} = 11$  баллов).

#### Задача № 14. «Звездное небо на горе Наблюдатель и в Самаре»

Условие. Как известно, самая высокая точка Жигулевских гор – гора Наблюдатель (высота  $h_N = 381.2$  м над уровнем моря). Средняя высота Самары над уровнем моря равна  $h_S = 100$  м. Полагая, что все звезды с звездной величиной  $\leq 6^m$  распределены на небесной сфере равномерно, оцените, на сколько таких звезд больше видно с вершины горы Наблюдатель, нежели из г. Самары. Городской засветкой, влиянием атмосферной пыли, рельефом и атмосферной рефракцией на результаты наблюдений пренебречь. (12 баллов).

Дано:

$$h_N = 381.2 \text{ м,}$$

$$h_S = 100 \text{ м,}$$

$$m_{\text{max}} = 6^m.$$

Найти:

$$\Delta N_* - ?$$

Решение:

Город Самара, как и вся Самарская область расположена на юго-востоке Восточно-Европейской равнины по среднему течению Волги. Как правило, перепад высот рельефа области не велик. Поэтому в среднем поверхность Земли, занимаемой областью, можно рассматривать как поверхность земного шара, радиус которого больше его океанического радиуса на  $h_S$  (см. рис. 10.а). Относительно данной поверхности, высота горы есть

$$\Delta h = h_N - h_S = 281.2 \text{ м.}$$

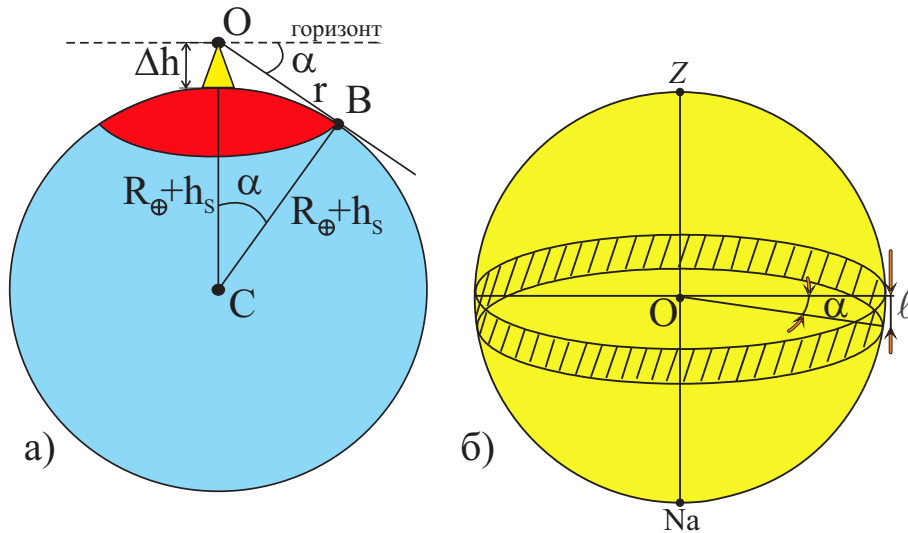


Рис. 10: к определению "избыточной полосы видимых звезд".

С вершины горы взору наблюдателя доступны не только звезды, которые в данный момент расположены над математическим горизонтом, но и часть звезд, расположенная под горизонтом внутри узкого кольца ("избыточной полосы") с углом раствора  $\alpha$  (см. рис. 10.а). Последний равен углу  $\angle OCB$ , (углы равны, поскольку их стороны взаимно перпендикулярны).

Косинус угла  $\angle OCB$ , в свою очередь, представляется в виде:

$$\cos \alpha = \frac{\mathfrak{R}_{\oplus} + h_S}{\mathfrak{R}_{\oplus} + h_N}, \quad (15)$$

здесь  $\mathfrak{R}_{\oplus} = 6371$  км – средний радиус Земли, определенный на уровне моря. Очевидно, угол  $\alpha$  мал, и потому косинус угла можно представить в виде:

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}. \quad (16)$$

С другой стороны, с учетом  $h_S, h_N \ll \mathfrak{R}_{\oplus}$ ,

$$\frac{\mathfrak{R}_{\oplus} + h_S}{\mathfrak{R}_{\oplus} + h_N} = \left(1 + \frac{h_S}{\mathfrak{R}_{\oplus}}\right) \left(1 + \frac{h_N}{\mathfrak{R}_{\oplus}}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{(h_N - h_S)}{\mathfrak{R}_{\oplus}}, \quad (17)$$

здесь мы учли приближенное выражение для бинома Ньютона

$$(1 + x)^{\gamma} \approx 1 + \gamma x, \quad \text{при } x \ll 1.$$

Из сопоставления (16) и (17) следует, что

$$\alpha \approx \sqrt{2 \frac{(h_N - h_S)}{\mathfrak{R}_{\oplus}}}. \quad (18)$$

Угловая площадь (телесный угол) "избыточной полосы" небесной сферы тогда определяется выражением вида (подобно площади тонкой прямолинейной полоски – длина  $\times$  ширина):

$$\Omega_{\text{belt}} = 2\pi\alpha \approx 2\pi\sqrt{2 \frac{(h_N - h_S)}{\mathfrak{R}_{\oplus}}}.$$

Составим пропорцию: на всей небесной сфере, телесной угол которой соответствует равный  $4\pi$ , расположено  $N_{\text{total}} = 6000$  звезд, видимых невооруженным глазом с  $m \leq m_{\text{max}}$ . А в телесном угле  $\Omega_{\text{belt}}$  расположено  $\Delta N$  звезд:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{\text{total}} \rightarrow 4\pi, \\ \Delta N \rightarrow \Omega_{\text{belt}}, \end{array} \right\}, \Rightarrow \Delta N = N_{\text{total}} \frac{\Omega_{\text{belt}}}{4\pi} = N_{\text{total}} \sqrt{\frac{(h_N - h_S)}{2\mathfrak{R}_{\oplus}}} = 28 \approx 30.$$

**Ответ:**  $\Delta N = N_{\text{total}} \sqrt{\frac{(h_N - h_S)}{2\mathfrak{R}_{\oplus}}} \approx 30$ . ( $\$_{\text{max}} = 12$  баллов).



**Задача № 15. «Вращение Земли и отклонение отвеса от направления на ее центр»**

**Условие.** Как известно, вращение Земли вокруг своей оси является одной из причин отклонения отвесной линии в данной точке поверхности Земли от направления на ее центр. Определите угол отклонения отвесной линии как функцию широты точки поверхности Земли в предположении, что последняя есть шар со сферически симметричным распределением массы, вращающийся с периодом  $T_{\oplus} = 23^{\text{ч}}56^{\text{м}}04^{\text{с}}$ . На каких широтах данный угол достигает максимального и минимального значений. Чему равны эти значения? (13 баллов).

<b>Дано:</b> $T_{\oplus} = 23^{\text{ч}}56^{\text{м}}04^{\text{с}}$ .
<b>Найти:</b> $\alpha(\varphi), \alpha_{\min}, \alpha_{\max} - ?$

**Решение:**

Как известно, *отвесная линия* – это прямая, параллельная вектору силы тяжести в данной точке поверхности Земли (или другого небесного тела). *Сила тяжести* – сила, действующая на любое материальное тело, находящееся вблизи поверхности Земли или другого астрономического тела. Сила тяжести, действующая на пробное тело массы  $m$  определяется выражением вида:

$$\vec{F}_T = m \vec{g}, \tag{19}$$

здесь  $\vec{g}$  – *ускорение свободного падения* – ускорение, приобретаемое телом под действием силы тяжести.

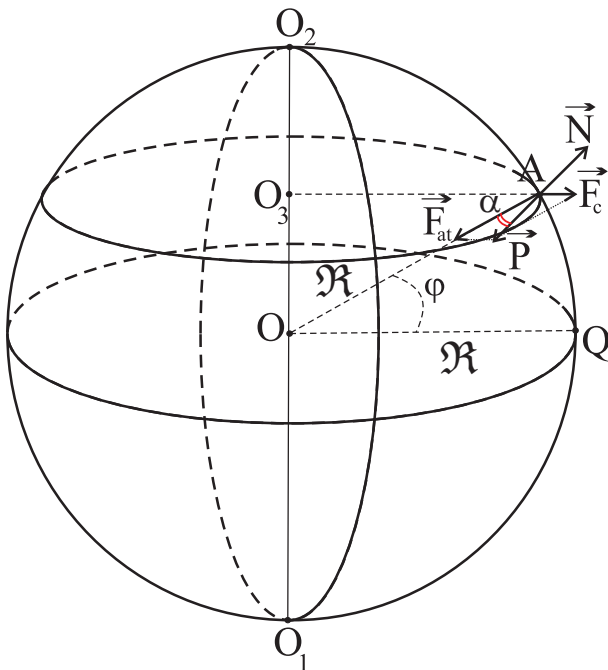


Рис. 11: к определению угла отклонения отвесной линии от направления на центр Земли.

Рассмотрим взаимодействие планеты с пробным телом (далее материальная точка А) массы  $m$ , находящимся на ее поверхности, на широте  $\varphi$  (см. рис. 11). В системе отсчета, жестко связанной с телом планеты, точка А неподвижна, а сама система является неинерциальной, поскольку участвует во вращательном движении вместе с планетой относительно далеких звезд. На материальную точку А на поверхности планеты действуют 3 силы (см. рис. 11):

- 1) сила тяготения  $\vec{F}_{at}$ , направленная к центру планеты;
- 2) центробежная сила  $\vec{F}_c$ , направленная от оси вращения планеты;
- 3) сила реакции поверхности планеты  $\vec{N}$ .

Поскольку относительно тела планеты и, следовательно, выбранной системы отсчета материальная точка А покоится, то сумма всех выше указанных сил должна быть равна нулю (согласно второму закону Ньютона):

$$\vec{F}_{at} + \vec{F}_c + \vec{N} = 0, \Rightarrow \vec{N} = -(\vec{F}_{at} + \vec{F}_c). \tag{20}$$

С другой стороны, согласно третьему закону Ньютона, для тела, покоящегося относительно горизонтальной поверхности имеет место:

$$\vec{P} + \vec{N} = 0, \tag{21}$$

где  $\vec{P}$  – вес тела. Последний, как известно, в состоянии относительного покоя материальной точки равен силе тяжести, действующей на точку А, т.е.

$$\vec{P} = \vec{F}_T = m \vec{g}. \tag{22}$$

Центробежную силу можно определить выражением вида:

$$\vec{F}_c = m \omega^2 \vec{r}, \tag{23}$$

где  $\omega = \frac{2\pi}{T_{\oplus}}$  – угловая скорость вращения планеты;  $\vec{r}' = \overrightarrow{O_3A}$ . Сила тяготения  $\vec{F}_{\text{at}}$  определяется выражением

$$\vec{F}_{\text{at}} = -\frac{Gm\mathfrak{M}}{r^3}\vec{r}, \quad (24)$$

где  $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2$  – универсальная гравитационная постоянная,  $\mathfrak{M}$  – масса планеты,  $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ . Из уравнений (20)–(22) следует уравнение вида:

$$m\vec{g} = \vec{F}_{\text{at}} + \vec{F}_c, \Rightarrow \vec{g} = -\frac{G\mathfrak{M}}{r^3}\vec{r} + \omega^2 r'\vec{r}'. \quad (25)$$

при этом модуль ускорения свободного падения есть

$$g = \sqrt{\vec{g}^2} = \sqrt{\left(\frac{G\mathfrak{M}}{r^2}\right)^2 + (\omega^2 r')^2 - 2\omega^2 \left(\frac{G\mathfrak{M}}{r^3}\right)(\vec{r}\vec{r}')} \quad (26)$$

Вспользуемся теоремой синусов для треугольника, составленного из сил  $m\vec{g}$ ,  $\vec{F}_c$ ,  $\vec{F}_{\text{at}}$ :

$$\frac{\sin \alpha}{F_c} = \frac{\sin \varphi}{mg}, \Rightarrow \sin \alpha = \sin \varphi \left(\frac{F_c}{mg}\right) = \sin \varphi \left(\frac{\omega^2 r'}{g}\right). \quad (27)$$

Т.о. для определения угла  $\alpha$  необходимо определить зависимости  $r'(\varphi)$  и  $g(\varphi)$ . Для этого воспользуемся определением **географической широты**  $\varphi$  – углом между плоскостью экватора и радиусом-вектором, проведенным из центра шара к данной точке (см. рис. 11). Тогда

$$r' = r \cdot \cos \varphi, \quad \vec{r}' \cdot \vec{r}' = r \cdot r' \cdot \cos \varphi = r^2 \cdot \cos^2 \varphi.$$

Т.о. при  $r \leq \mathfrak{R}_{\oplus}$  ускорение свободного падения, согласно (26), представляется в виде:

$$g(r, \varphi) = g_0 \left(\frac{r}{\mathfrak{R}_{\oplus}}\right) \sqrt{1 + (\chi^2 - 2\chi) \cos^2 \varphi}, \quad \text{где} \quad (28)$$

$$g_0 = \frac{G\mathfrak{M}_{\oplus}}{\mathfrak{R}_{\oplus}^2}, \quad \chi = \frac{4\pi^2 \mathfrak{R}_{\oplus}}{g_0 T_{\oplus}^2}, \quad (29)$$

здесь  $\mathfrak{M}_{\oplus} = 5.974 \cdot 10^{24} \text{ кг}$  – масса Земли,  $\mathfrak{R}_{\oplus} = 6371 \text{ км}$  – ее средний радиус.

Таким образом, *ускорение свободного падения в общем случае зависит от расстояния до центра планеты и от широты местонахождения материальной точки А*. Рассмотрим ряд частных случаев:

- ускорение свободного падения у поверхности планеты ( $r = \mathfrak{R}$ ):

$$g(\varphi) = g_0 \sqrt{1 + (\chi^2 - 2\chi) \cos^2 \varphi}. \quad (30)$$

- Безразмерный параметр  $\chi$  определяется отношением величин сил  $\vec{F}_c$  (определенной на экваторе) и  $\vec{F}_{\text{at}}$ . Параметр  $\chi$  для любой классической планеты Солнечной системы есть величина, удовлетворяющая условию  $\chi \ll 1$ , следовательно,  $\chi^2 \ll \chi$ . Тогда для ускорения свободного падения справедливо следующее приближенное выражение

$$g(\varphi) \approx g_0 \sqrt{1 - 2\chi \cos^2 \varphi}. \quad (31)$$

Учитывая также тот факт, что  $\cos^2 \varphi \leq 1$  и приближение вида  $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$ , при  $|x| \ll 1$ , последний результат можно редуцировать к виду:

$$g(\varphi) \approx g_0(1 - \chi \cos^2 \varphi). \quad (32)$$

Из выражений (27), (30) и (32) следует, что

$$\alpha = \arcsin \left[ \frac{\chi}{2} \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1 + (\chi^2 - 2\chi) \cos^2 \varphi}} \right] \approx \arcsin \left[ \frac{\chi}{2} \frac{\sin 2\varphi}{(1 - \chi \cos^2 \varphi)} \right]. \quad (33)$$

Для Земли  $\chi = 3.45 \cdot 10^{-3}$ , в результате знаменатель дроби в аргументе функции  $\arcsin$  слабо отличается от единицы, поэтому величина  $\alpha$  определяется главным образом, величиной числителя дроби. Последняя достигает максимума при  $\varphi = 45^\circ$ . Следовательно

$$\alpha_{\max} \approx \arcsin \left[ \frac{\chi}{2} \frac{1}{(1 - \frac{\chi}{2})} \right] = 5.9', \text{ при } \varphi = \pm 45^\circ; \quad \alpha_{\min} = 0.0', \text{ при } \varphi = 0^\circ, \pm 90^\circ. \quad (34)$$

**Ответ:** представлен выражениями (33), (34). ( $\$_{\max} = 13$  баллов).

### Задача № 16. «Свойства звезды Kepler-138»

**Условие.** В июне 2015 года американские астрономы объявили об открытии самой легкой экзопланеты, известной на тот момент, Kepler-138b. Эта планета обращается вокруг красного карлика Kepler-138 (с эффективной температурой поверхности  $T_* = 3871$  К и радиусом  $\mathfrak{R}_* = 0.54 \mathfrak{R}_\odot$ , M0V) по почти круговой орбите радиуса  $r_P = 0.0769$  а.е., с периодом  $P_P = 10.3$  сут. Полагая, что масса планеты много меньше массы карлика, оцените массу последнего (в массах Солнца) и его среднюю массовую плотность. Вычислите также его светимость (в светимостях Солнца), болометрическую видимую звездную величину и визуальную видимую звездную величину (для землянина), при условии, что расстояние до звезды составляет  $\Delta_* = 66.5$  пк. (13 баллов).

#### Дано:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_* &= 0.54 \mathfrak{R}_\odot, \\ T_* &= 3871 \text{ К}, \\ r_P &= 0.0769 \text{ а.е.}, \\ P_P &= 10.3 \text{ сут}, \\ \Delta_* &= 66.5 \text{ пк}. \end{aligned}$$

#### Найти:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_*, \rho_*, L_*, m_*^{(b)} \\ m_*^{(v)} - ? \end{aligned}$$

#### Решение:

Согласно условию задачи, масса экзопланеты ( $\mathfrak{M}_P$ ) много меньше массы центральной звезды ( $\mathfrak{M}_*$ ), следовательно, последнюю можно считать неподвижной и рассматривать движение экзопланеты вокруг звезды по окружности. Второй закон Ньютона для экзопланеты запишется в виде:

$$\mathfrak{M}_P a_P = \frac{G \mathfrak{M}_P \mathfrak{M}_*}{r_P^2}, \Rightarrow \mathfrak{M}_* = \frac{a_P r_P^2}{G}, \quad (35)$$

здесь  $a_P$  – центростремительное ускорение экзопланеты. Последнее может быть представлено в виде:

$$a_P = \frac{4\pi^2 r_P}{P_P^2}.$$

В итоге масса звезды, согласно (35), может быть представлена в виде:

$$\mathfrak{M}_* = \frac{4\pi^2 r_P^3}{G P_P^2} = 1.143 \cdot 10^{30} \text{ кг} = 0.575 \mathfrak{M}_\odot. \quad (36)$$

Средняя массовая плотность звезды равна

$$\rho_* = \frac{\mathfrak{M}_*}{\frac{4\pi}{3} \mathfrak{R}_*^3} = \frac{3\pi r_P^3}{G T_P^2 \mathfrak{R}_*^3} = 5150 \text{ кг/м}^3. \quad (37)$$

Светимость звезды определяется в виде:

$$L_* = 4\pi \mathfrak{R}_*^2 \sigma T_*^4 = 2.257 \cdot 10^{25} \text{ Вт} = 0.06 L_\odot. \quad (38)$$

Далее определим болометрическую видимую звездную величину ( $m_*^{(b)}$ ) звезды по формуле Погсона:

$$m_*^{(b)} - m_\odot^{(b)} = -2.5 \lg \left( \frac{E_*^{(b)}}{E_\odot^{(b)}} \right), \quad (39)$$

здесь  $m_{\odot}^{(b)} = -26.74^m$  – болометрическая видимая звездная величина Солнца,  $E_*^{(b)}, E_{\odot}^{(b)}$  – болометрические освещенности, создаваемые красным карликом Kepler-138 и Солнцем у поверхности Земли. Последние представляются в виде:

$$E_*^{(b)} = \frac{L_*}{4\pi \Delta_*^2}, \quad E_{\odot}^{(b)} = \frac{L_{\odot}}{4\pi a_{\oplus}^2},$$

где  $L_{\odot} = 3.827 \cdot 10^{26}$  Вт – светимость Солнца,  $a_{\oplus} = 1$  а.е. – среднее расстояние от Земли до Солнца. В результате получаем

$$m_*^{(b)} = m_{\odot}^{(b)} - 2.5 \lg \left( \frac{L_*}{L_{\odot}} \left[ \frac{a_{\oplus}}{\Delta_*} \right]^2 \right) = 12.19^m, \quad (40)$$

Визуальная видимая звездная величина равна

$$m_*^{(v)} = m_*^{(b)} - \Delta m^{(b)} = 13.62^m. \quad (41)$$

здесь  $\Delta m^{(b)} = -1.43^m$  – болометрическая поправка, определяемая спектральным классом звезды и классом светимости (M0V). Данную величину можно найти в справочной литературе<sup>1</sup>.

**Ответ:** к задаче представлен выражениями (36), (37), (38), (40), (41). ( $\$_{\max} = 13$  баллов).

### Задача № 17. «Телескоп для наблюдений системы Kepler-138»

**Условие.** С использованием данных и результатов решения предыдущей задачи оцените минимальный диаметр зеркала телескопа, который еще пригоден для наблюдений звезды Kepler-138. Оцените видимую звездную величину экзопланеты Kepler-138b, когда последняя находится в окрестности своей наибольшей элонгации, учитывая, что радиус экзопланеты равен 0.45 радиуса Земли и полагая, что сферическое альbedo планеты ( $A_B$ ) равно геометрическому альbedo Марса ( $p_M = 0.15$ ). Телескоп с каким диаметром зеркала пригоден для прямых наблюдений экзопланеты? Каков должен быть диаметр зеркала, чтобы разрешить радиус орбиты планеты  $a_2$  на указанном расстоянии  $r_1$ ? Каким должен быть диаметр зеркала телескопа, который будет удовлетворять всем выше перечисленным условиям? (14 баллов).

#### Решение:

##### Дано:

$$\mathfrak{R}_P = 0.45 \mathfrak{R}_{\oplus}, \\ A_B = p_M = 0.15.$$

##### Найти:

$$D_{\min}^{(1)}, m_P, D_{\min}^{(2)}, \\ D_{\min}^{(3)} - ?$$

Согласно решению предыдущей задачи, звездная величина Kepler-138 равна  $m_*^{(v)} = 13.62^m$ . Чтобы в телескоп можно было отчетливо пронаблюдать эту звезду, необходимо, чтобы проникающая сила телескопа инструмента  $m_T \geq m_*^{(v)}$ , причем

$$m_T = 2.1^m + 5.0^m \lg D_T, \Rightarrow D_T = 10^{(m_T - 2.1^m)/5.0^m}. \quad (42)$$

В итоге

$$D_{\min}^{(1)} = 10^{(m_*^{(v)} - 2.1^m)/5.0^m} = 201 \text{ мм} \approx 20 \text{ см.}$$

Для оценки визуальной видимой звездной величины планеты учтем, что в фазе наибольшей элонгации экзопланеты, ее фазовый угол по отношению к родительской звезде будет равен  $90^\circ$ , при этом фаза планеты равна  $\Phi_P = 0.5$ . Т.о. площадь освещенной части диска планеты равен 0.5 от всей его площади. Освещенность, создаваемая звездой у поверхности планеты есть

$$E_* = \frac{L_*}{4\pi r_P^2}.$$

Поток падающего света от звезды на поверхность планеты, и отраженного в направлении Земли есть

$$\Phi_* = A_B E_* \pi \mathfrak{R}_P^2 \Phi_P = p_M \frac{L_*}{4r_P^2} \Phi_P \mathfrak{R}_P^2.$$

<sup>1</sup> см., например, Филиппов Ю.П. Современная астрономия: избранные задачи для школьников и студентов. Издание второе, исправленное и дополненное. – Самара: изд-во «СДДЮТ». – 2015. – 168с.

Освещенность, создаваемая планетой у поверхности Земли есть

$$E_P = \frac{\Phi_*}{2\pi\Delta_*^2} = \frac{1}{8\pi} p_M \Phi_P \frac{L_*}{\Delta_*^2 r_P^2} \mathfrak{R}_P^2.$$

С использованием формулы Погсона определим видимую звездную величину экзопланеты:

$$m_P = m_{\odot}^{(b)} - 2.512 \lg \left( \frac{E_P}{E_{\odot}} \right) = m_{\odot}^{(b)} - 2.512 \lg \left( \frac{1}{2} p_M \Phi_P \left[ \frac{L_*}{L_{\odot}} \right] \frac{a_{\oplus}^2 \mathfrak{R}_P^2}{\Delta_*^2 r_P^2} \right) = 33.8^m.$$

С использованием формулы (42) легко вычислить минимальный диаметр главного зеркала телескопа, который может непосредственно увидеть данную экзопланету:

$$D_{\min}^{(2)} = 10^{(m_P - 2.1^m)/5.0^m} \approx 2.20 \text{ км.}$$

Максимальный угол, под которым будет виден радиус орбиты экзопланеты есть

$$\alpha = \left( \frac{a_P}{\Delta_*} \right) 206265'' = 1.16 \cdot 10^{-3}''.$$

Чтобы телескоп смог разрешить данный масштаб необходимо, чтобы его разрешающая способность, определяемая формулой вида

$$\beta_T = \frac{120''}{D[\text{мм}]}, \quad (43)$$

была не больше  $\alpha$ . В предельном случае имеем

$$D_{\min}^{(3)} = \frac{120''}{\alpha} = 103.4 \text{ м.} \quad (44)$$

Телескоп, который будет удовлетворять всем перечисленным в условии требованиям, должен иметь диаметр, являющимся максимальным значением среди результатов  $\{D_{\min}^{(1)}, D_{\min}^{(2)}, D_{\min}^{(3)}\}$ . Т.о. телескоп должен иметь диаметр 602.5 км.

**Ответ:**  $D_{\min}^{(1)} \approx 20$  см,  $D_{\min}^{(2)} \approx 2.2$  км,  $D_{\min}^{(3)} \approx 103.4$  м; телескоп, который будет удовлетворять всем выше перечисленным условиям задачи должен иметь диаметр 2.2 км. ( $\$_{\max} = 14$  баллов).

### Задача № 18. «Проект LLMT»

**Условие.** Недавно американско-канадской группой инженеров и астрономов был предложен амбициозный проект Lunar Liquefied Mirror Telescope – проект телескопа с главным жидким зеркалом диаметром  $D_T = 100$  м, который будет расположен на Луне. Главное зеркало будет образовано ионной жидкостью, помещенной в цилиндрический поддон, вращающийся с некоторой постоянной скоростью  $\omega_T$ . Телескоп с жидким зеркалом привлекателен по многим причинам, прежде всего, дешевизной и возможностью создавать телескопы с очень большими параболическими зеркалами. Главное преимущество параболического зеркала – отсутствие сферической аберрации. Докажите строго математически, что

1. у параболического зеркала отсутствует сферическая аберрация.
2. у сферического зеркала в случае малости отношения  $D_T/2r$  (где  $r$  – радиус кривизны поверхности), сферическая аберрация является пренебрежимо малой.
3. поверхность жидкости, вращающейся вместе с поддоном в однородном поле тяготения, есть параболоид вращения.
4. Определите разрешающую способность такого телескопа и его проникающую силу.
5. Исследуйте зависимость фокусного расстояния такого зеркала от частоты обращения. При каких значениях частот вращения  $\nu$  (в Гц) поддона его относительное отверстие будет равно а) 1 : 1, б) 1 : 3, в) 1 : 6, г) 1 : 10, д) 1 : 15. (15 баллов).

Решение:

Как известно, **сферическая аберрация** – это аберрация оптических систем, проявляющаяся в несовпадении фокусов для лучей света, проходящих на разных расстояниях от оптической оси. Чтобы сферическая аберрация отсутствовала в системе необходимо, чтобы все лучи отраженные разными участками поверхности зеркала собирались в одной точке.

1. Докажем, что у параболического зеркала отсутствует сферическая аберрация. Для этого рассмотрим точечный источник света, удаленный от зеркала. Данный источник порождает пучок лучей, параллельных главной оптической оси зеркала (т. е. поток излучения имеет плоский волновой фронт).

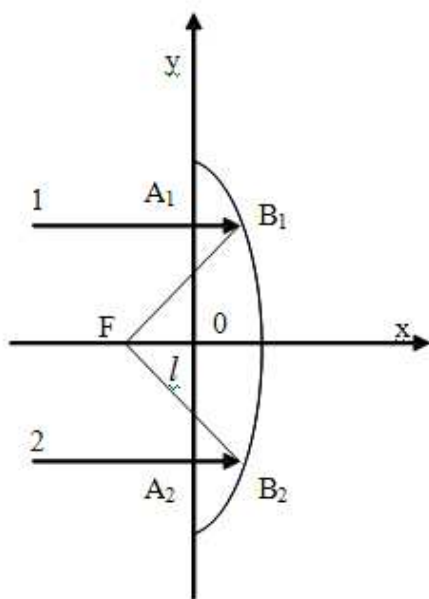


Рис. 12: к определению уравнения профиля зеркала.

Рассмотрим для примера два световых луча 1 и 2. При распространении до точек  $A_1$  и  $A_2$  данные лучи были в одинаковых условиях.

Воспользуемся принципом Ферма: *свет всегда распространяется по кратчайшему оптическому пути*. Введем декартову систему координат так как показано на рисунке.

Определим оптический путь луча, прошедшего по участку  $A_1B_1F$ . Для этого мы учтем, что координаты точек  $A_1$ ,  $B_1$  есть:

$$A_1(0, y); B_1(x, y)$$

тогда

$$\sqrt{(x+l)^2 + y^2} = C \quad (45)$$

где  $C$ -константа. Постоянство оптического пути следует из принципа Ферма и эквивалентности состояний лучей, до того как они пересекли ось  $OY$ .

Определим константу  $C$  через геометрические параметры зеркала:  $R$  – его радиус;  $h$  – глубина зеркала. Для луча, падающего на край зеркала, из (45) следует, что при  $x = 0$ :

$$\sqrt{l^2 + R^2} = C \quad (46)$$

Иначе из (45) для луча, падающего в центр зеркала:

$$2h + l = C \quad (47)$$

Приравниваем левые части (2) и (3):

$$\sqrt{l^2 + R^2} = 2h + l$$

Возведем в квадрат обе части:

$$l^2 + R^2 = 4h^2 + 4hl + l^2, \Rightarrow R^2 - 4h^2 = 4hl, \Rightarrow l = \frac{R^2 - 4h^2}{4h}$$

$$l = \frac{R^2}{4h} - h \quad (48)$$

Следовательно константу  $C$  можно представить в виде:

$$C = \frac{R^2}{4h} + h \quad (49)$$

Из (45) и (47) следует, что:

$$\begin{aligned} x + \sqrt{(x+l)^2 + y^2} &= 2h + l \\ \sqrt{(x+l)^2 + y^2} &= 2h + l - x \end{aligned} \quad (50)$$

$$(x+l)^2 + y^2 = 4h^2 + l^2 + x^2 + 4hl - 2lx - 4hx$$

$$y^2 = 4h^2 + 4hl - 4lx - 4hx$$

или

$$y^2 = -4x(l+h) + h^2 + 4hl$$

Поскольку  $l = \frac{R^2}{4h} - h$

$$y^2 = -x \left( \frac{R^2}{h} \right) + R^2$$

$$y^2 = R^2 \left( \frac{h-x}{h} \right) \quad (51)$$

Из рис. 12 следует выражение для фокусного расстояния зеркала:

$$f = \ell + h = \frac{R^2}{4h}. \quad (52)$$

Тогда уравнение поверхности зеркала (52) представляется в виде:

$$y^2 = R^2 - 4fx \quad (53)$$

Очевидно, последнее уравнение определяет профиль параболы, симметрично расположенной относительно оси  $OX$ . Таким образом, чтобы зеркало собирало все световые лучи в одной точке (F) его кривизна поверхности должна иметь параболический профиль.

**2.** Докажем, что у сферического зеркала в случае малости отношения  $D_T/2r$  ( $D_T/2r \ll 1$ ) сферическая абберация является пренебрежимо малой. Воспользуемся уравнением (51) и представим его в виде:

$$\frac{y^2}{R^2} - 1 = -\frac{x}{h}$$

Возведем обе части последнего уравнения в квадрат:

$$\left( \frac{y^2}{R^2} \right)^2 - 2 \left( \frac{y^2}{R^2} \right) + 1 = \frac{x^2}{h^2}.$$

Полагая далее, что  $y^2 \ll R^2$ , последнее уравнение можно переписать в виде:

$$-2 \left( \frac{y^2}{R^2} \right) + 1 \approx \frac{x^2}{h^2}$$

откуда

$$\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{\left( \frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2} = 1 \quad (54)$$

Полагая, что  $h = \frac{R}{\sqrt{2}} = r$ , то получаем уравнение окружности:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \quad (55)$$

При этом фокусное расстояние зеркала есть:

$$f = \frac{\sqrt{2}R}{4} = \frac{r}{2}, \quad (56)$$

здесь  $r$  – радиус кривизны зеркала. Т.о. сферическое зеркало с условием  $D_T/2r \ll 1$ , также позволяет избежать данной абберации. Именно поэтому рефлектор с малым объективом ( $D < 15$ )

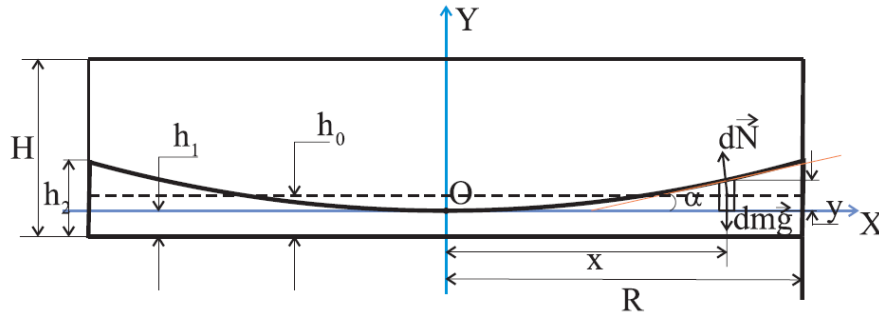


Рис. 13: к определению профиля поверхности жидкого зеркала.

имеют сферическое зеркало (оно гораздо проще в изготовлении с технической точки зрения), а рефлекторы, у которых  $D > 20$  см имеют, как правило, параболическое зеркало.

3. Докажем, что поверхность жидкости, вращающейся вместе с поддоном в однородном поле тяготения, есть парабола вращения. Итак, исходную физическую систему составляют поддон, имеющий форму цилиндра с радиусом основания  $R$  и высотой  $H$  (см. рис. 13). Данный поддон может свободно вращаться вокруг своей оси симметрии под действием внешнего электропривода с регулируемой частотой  $\omega$ . Данный поддон частично заполнен жидкостью (высота столба жидкости в статичном состоянии  $h_0$ , причем  $h_0 < H$ ) с относительно высоким показателем преломления  $n$ .

При вращении поддона, часть жидкости смещается в его периферийную часть. В итоге профиль поверхности жидкости уже не есть плоскость, а какая-то трехмерная поверхность вращения,  $2D$ -профиль, которой мы должны определить.

Рассмотрим ситуацию с вращающимся поддоном частично заполненным жидкостью с угловой скоростью  $\omega$  в установившемся режиме. Далее рассмотрим бесконечно малый элемент жидкости массы  $dm$ , отстоящий от оси вращения на расстоянии  $x$ , имеющий толщину  $dx$ , высоту  $y$ , и ширину  $dz$ .

Выберем декартову систему координат так как показано на рис. 13. При этом оси системы не меняют своей ориентации в пространстве с течением времени, а система составляет основу инерциальной системы отсчета (ИСО). Запишем второй закон Ньютона для элемента жидкости в ИСО:

$$dm\vec{a}_c = dm\vec{g} + d\vec{N}, \tag{57}$$

здесь  $dm\vec{g}$  – вектор силы тяжести, приложенный к данному элементу жидкости,  $d\vec{N}$  – вектор силы реакции, действующий со стороны соседних элементов жидкости. Следует отметить, что последний вектор перпендикулярен поверхности жидкости в точке, где находится данный элемент жидкости.

Рассмотрим уравнение (57) в проекциях на координатные оси:

$$\text{на OX: } -dm a_c = -N \sin \alpha, \tag{58}$$

$$\text{на OY: } 0 = -dm g + N \cos \alpha, \tag{59}$$

где  $a_c = \omega^2 x$  – центростремительное ускорение,  $g$  – ускорение свободного падения. При этом

$$\left. \begin{aligned} N \sin \alpha &= dm \omega^2 x, \\ N \cos \alpha &= dm g. \end{aligned} \right\} \tag{60}$$

Поделив первое уравнение на второе последней системы уравнений, в итоге получаем следующее уравнение:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 x}{g}. \tag{61}$$

Далее следует отметить, что при перемещении с левой на правую границу элемента жидкости горизонтальная координата меняется на величину  $dx$ , при этом вертикальная координата поверхности жидкости меняется на величину  $dy$ . Из рис. 1 также следует, что отношение этих приращений есть тангенс угла наклона касательной к данной поверхности в данной точке.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}. \tag{62}$$



Приравняем правые части (61) и (62) в итоге получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}, \Rightarrow dy = \frac{\omega^2}{g} x dx.$$

Проинтегрируем последнее уравнение в пределах  $(0, x)$ ,  $(0, y)$  соответственно.

$$\int_0^y dy' = \int_0^x \frac{\omega^2}{g} x' dx', \Rightarrow y = \frac{\omega^2}{2g} x^2.$$

Мы получили уравнение параболы, которое можно представить в виде:

$$y = a \cdot x^2, \text{ где } a = \frac{\omega^2}{2g}. \quad (63)$$

Т.о. мы строго доказали, что уравнение профиля поверхности вращающейся жидкости есть парабола (квадратичная), а сама поверхность есть параболоид вращения. При этом профиль поверхности зависит лишь от ускорения свободного падения на поверхности планеты (в частности, Земли) и от угловой скорости вращения поддона.

4. Проницающую силу и разрешающую способность телескопа LLMT оценим по формулам (42), (43):

$$m_T = 27.1^m, \quad \beta_T = 1.2 \cdot 10^{-3}'' . \quad (64)$$

5. Определим явную зависимость фокусного расстояния ( $f$ ) параболического зеркала от частоты обращения ( $\omega$ ). Для этого приведем уравнение (53) к виду (63), а именно произведем взаимную замену  $x \leftrightarrow y$ , произведем преобразование сдвига вида  $y \rightarrow y - R^2/4f^2$ . В результате уравнение (53) представляется в виде:

$$y = \frac{1}{4f} x^2.$$

Из сопоставления последнего уравнения с уравнением (63) следует, что

$$f = \frac{g}{2\omega^2} = \frac{g}{8\pi^2\nu^2}.$$

Т.о. зависимость фокусного расстояния от частоты вращения  $\nu$  является гиперболической.

Относительное отверстие телескопа есть

$$A = \frac{D_T}{f} = \frac{8\pi^2 D_T \nu^2}{g}, \Rightarrow \nu = \sqrt{\frac{g A}{8\pi^2 D_T}}. \quad (65)$$

С использованием последнего результата для пяти значений  $A$  (при  $g = g_{\text{З}} = 1.62 \text{ м/с}^2$ ) получаем следующие значения  $\nu$ : а)  $1.4 \cdot 10^{-2}$  Гц, б)  $8.3 \cdot 10^{-3}$  Гц, в)  $5.8 \cdot 10^{-3}$  Гц, г)  $4.5 \cdot 10^{-3}$  Гц, д)  $3.7 \cdot 10^{-3}$  Гц.

**Ответ:** 4)  $m_T = 27.1^m$ ,  $\beta_T = 1.2 \cdot 10^{-3}''$ ; 5)  $f = \frac{g}{8\pi^2\nu^2}$ ; а)  $1.4 \cdot 10^{-2}$  Гц, б)  $8.3 \cdot 10^{-3}$  Гц, в)  $5.8 \cdot 10^{-3}$  Гц, г)  $4.5 \cdot 10^{-3}$  Гц, д)  $3.7 \cdot 10^{-3}$  Гц. ( $\$_{\text{max}} = 15$  баллов).